



TITLE:

Ω -contractible closed 1-complex

AUTHOR(S):

小林, 一章

CITATION:

小林, 一章. Ω -contractible closed 1-complex. 数理解析研究所
講究録 1983, 487: 131-142

ISSUE DATE:

1983-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103476>

RIGHT:

ω -contractible closed 1-complex

北大理 小林一章

§0. どのような次元多様体の中で十分高い可縮性 (contractibility) をもつ単純閉曲線は 3 次元球体に含まれるかという問題を考える。そのために考慮の対象を単純閉曲線よりもう少し一般的な閉 1 次元複体 K とする (即ち K の全ての頂点は 2 本以上の辺の頂点となっているような 1 次元複体)。

\tilde{K} を閉 1 次元複体で全ての頂点の次数が高々 3 であるものとし, K を 3 次元多様体 M に含まれる 1 次元複体で \tilde{K} に単体的同型になっているものとする。 $\varphi: \tilde{K} \rightarrow K$ をその単体的同型写像とする。 L を次の条件 (1) ~ (4) を満足する 2 次元複体とする。 (1) $L^{(1)} = \tilde{K}$ ここで $L^{(1)}$ は L の 1 次元骨格。

(2) $|L - L^{(1)}|$ は 2 次元球体の disjoint union になっている。

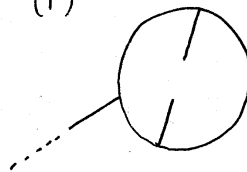
(3) $L^{(1)}$ の各 1-単体は高々 2 つの 2-球体と交叉する。

(4) $L \searrow 1$ 点 (1 点にカラプシブル)

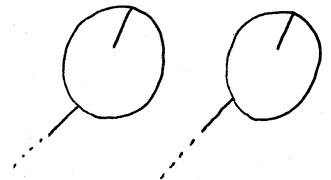
$\pi: L \rightarrow M$ を $\pi|_{L^{(1)}} = \varphi$ となるような PL-写像とする。

$\mathcal{S}(L) = \{x \in L \mid U(x, L) \cong B^1 \text{ or } B^2\}$, $\mathcal{S}(\Phi) = \mathcal{Q}\{x \in L \mid \# \Phi^{-1}(x) \neq 1\}$ とする。 Φ を ε -アイトポイで動かすことにより $\mathcal{S}(L) \cap \mathcal{S}(\Phi) = \emptyset$ と仮定してよい。また piping technique を使うことにより, 写像 Φ の singularity は次のタイプのみと仮定してよい。

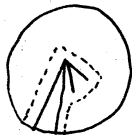
type I (clasp type) (1)



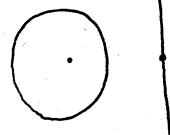
(2)



type II (branch type)



type III (isolated type)



$\mathcal{S}(\Phi)$ の連結成分の数が $\#\{\text{type I}\} = 2p$, $\#\{\text{type II}\} = q$, $\#\{\text{type III}\} = 2r$ のとき Φ のタイプは (p, q, r) であるという。 $\mathcal{S}(L)$ の連結成分の数を s とおく。 $K \subset M^3$ を一つ固定したとき, 上の性質を満足する 2次元複体 αL と PL-写像 Φ_α が対応し, その集合 $\{(\alpha L, \Phi_\alpha)\}$ が考えられる $(\alpha L, \Phi_\alpha)$ に整数の 4 対 $(s, p, q, r)_\alpha$ が対応し $\{(s, p, q, r)_\alpha\}$ に辞書式順序をいれ, その最小元を考える。 K に対する 2複体と PL-写像の対の最小元とは上の意味の最小元に対応する対 $(\alpha L, \Phi_\alpha)$ を意味する。 また K に対する PL-写像の最小元とは s を考慮に入れたい対の集合 $\{(s, p, q, r)_\alpha\}$ の最小元に対応する PL-写像 Φ_α を意味する。

(勿論この時適当な αL があって $\Phi_\alpha: \alpha L \rightarrow M^3$ となっている).

定義. K を 3次元多様体 M の中の閉1次元複体とする. 上の条件(1)~(4)を満足する 2-複体 L と PL -写像 Φ があるとき K は (M 内で) 0-ホモトープ又は 0-*contractible* という. $K \simeq 0$ とかく. $K \simeq 0$ のとき (K に対する) PL -写像の最小元 $\Phi: L \rightarrow M$ を取り $\Phi(L) \searrow K_1$ (K_1 は閉1-複体) とする. もし全てのカラプシング $\Phi(L) \searrow K_1$ に対し $K_1 \simeq 0$ なら K を 1-*contractible* といい, $\Phi(L)$ を 0-*contractible* という.

$K = \Phi(L''') \subset \Phi(L) \searrow K_1 = \Phi(L''') \subset \Phi(L_1) \searrow K_2$ (K_2 は閉1-単体で各 PL -写像は最小元, カラプシングは任意のもの) なる列があって $K_2 \simeq 0$ のとき K を 2-*contractible*, $\Phi(L)$ を 1-*contractible* という. $K = \Phi(L''') \subset \Phi(L) \searrow K_1 = \dots \searrow K_{n-1} = \Phi_{n-1}(L_{n-1}''') \subset \Phi_{n-1}(L_{n-1}) \searrow K_n$ (K_n は閉1-複体で各 PL -写像は最小元) なる列があって $K_n \simeq 0$ のとき K を n -*contractible*, $\Phi(L)$ を $(n-1)$ -*contractible* という. 任意の自然数 n に対して K が n -*contractible* のとき K を ∞ -*contractible* といい, $\Phi(L)$ が n -*contractible* のとき $\Phi(L)$ を ∞ -*contractible* という. K が ∞ -*contractible* であるような特異 2-複体 $\Phi(L)$ を張るとき K を ω -*contractible* という. 得られた結果は次の定理である.

定理. H をハンドル体とする (即ち $H \cong \bigcup (S^1 \times D^2)_i$) K を

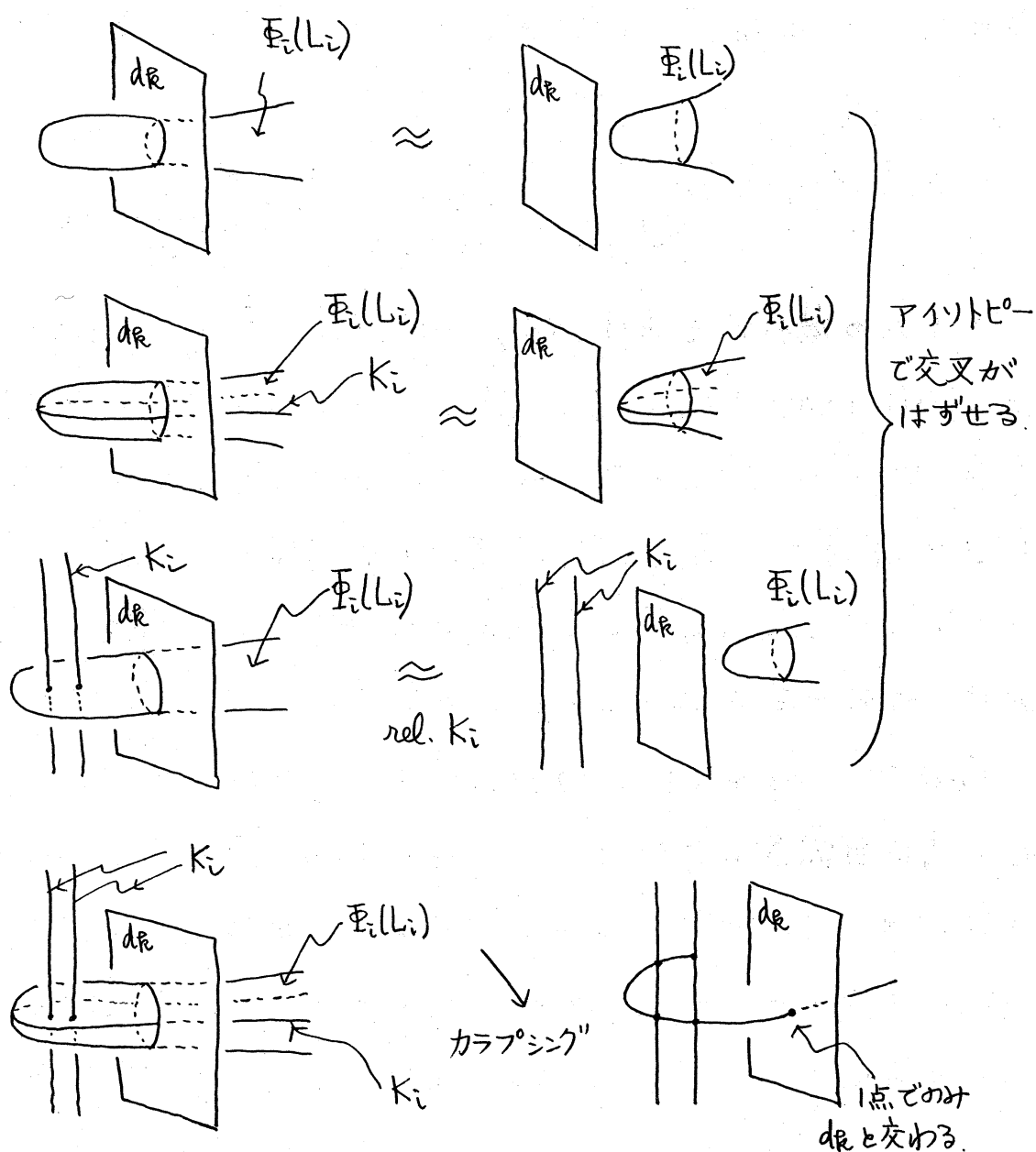
H 内の ω -contractible な閉 1-複体とすると K は H 内で 3-球体に含まれる。

§1. 定理の証明. H の種数を g とし, d_1, d_2, \dots, d_g を標準的なメリディアン 2-球体とする. $d = \bigcup_{i=1}^g d_i$ とおく.

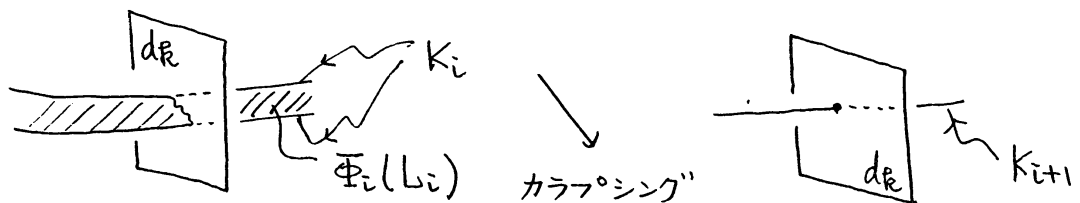
$\mathcal{C}(H - U(d, H))$ は 3-球体に位相同型だから $K \cap d = \emptyset$ なら証明終り. $\Phi: L \rightarrow M^3$ を $\Phi|L^{(1)} = \varphi$ とする PL-写像とする (ただし $\varphi: \tilde{K} \rightarrow K$ は単体的同型写像). $\mathcal{J}(K) = \{x \in K \mid U(x, K) \neq B^1, B^2\}$ としたとき ε -isotopy で K を動かすことにより $\mathcal{J}(K) \cap d = \emptyset$ としてよい. また $\Phi(\mathcal{J}(\Phi)) \cap d = \emptyset$ としてよい. 一般に L についての条件(3)を考慮にいれると $\Phi(L) \cap d$ の連結成分は孤立点, 単純弧, 単純閉曲線のいずれかである. $n_0 = \#(K \cap d)$ とおく ($K \cap d$ は有限個の点からなる集合). K をアイソトピーで動かして $\#(K \cap d)$ を最小にし, それを n_0 とする. $\Phi(L)$ は ω -contractible だから任意の n に対して $K = \Phi(L^{(1)}) \subset \Phi(L) \searrow K_1 = \Phi_1(L_1^{(1)}) \subset \Phi_1(L_1) \searrow K_2 = \dots \searrow K_n = \Phi_n(L_n^{(1)}) \subset \Phi_n(L_n)$ とする列がある. ここで各 K_i は閉 1-複体, 各 PL-写像 Φ_i は K_i に対する最小の PL-写像, カラプシングは任意のものである. $\Phi(L)$ を K を固定するアイソトピーで動かして $\Phi(L) \cap d$ の連結成分の個数を最小にしておく.

Case 1. $\#\{i \mid i \leq n, \dim(\Phi_i(L_i) \cap d) = 1\} > n_0$ とする n が

存在する場合. ($\dim(\Phi_i(L_i) \cap d) = 1$ とする成分は単純弧か単純閉曲線). そこで $\#\{i \mid i \leq n, \dim(\Phi_i(L_i) \cap d) = 1\} > n_0$ とする最小の n を n_1 とおく. そして $d \cap \Phi_i(L_i)$ の連結成分が単純閉曲線の場合は以下のようにして $d \cap K_i$ の連結成分の個数を減らせる (i.e. $\#(d \cap K_i) > \#(d \cap K_{i+1})$ と出来る).



最後の例は先ず K_i と d_R は交わるときは必ず2以上の偶数個で交わり, またカラプシングは定義よりどのようなカラプシングを取ってもよいから図で指差されるようなカラプシングを取る事により常に $\#(d_R \cap K_i) > \#(d_R \cap K_{i+1})$ となるように出来る. また $d_R \cap \Phi_i(L_i)$ の連結成分が単純図の場合は下図のように明らかに $\#(d_R \cap \Phi_i(L_i)) > \#(d_R \cap \Phi_{i+1}(L_{i+1}))$ と出来る.

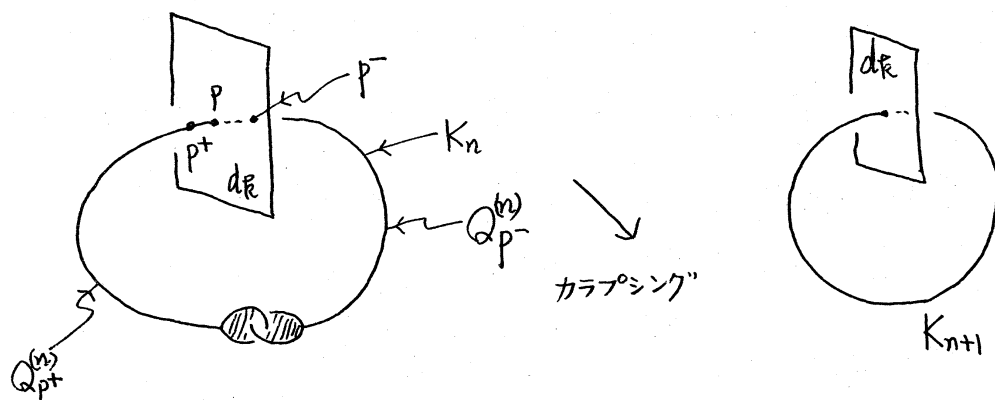


いずれの場合でも $\#(K_i \cap d) > \#(K_j \cap d)$ ($i, j \in \{i \mid i \leq n_1, \dim(\Phi_i(L_i) \cap d) = 1\}, i < j$) 従って $n_1 > n_0$ より $\#(K_{n_1} \cap d) < 0$ (i.e. $K_{n_1} \cap d = \emptyset$) となる. 故に $K_{n_1} \subset B^3 \subset H$ となる3-球体 B^3 がある. $K_{n-1} = \Phi_{n-1}(L_{n-1}^{(1)}) \subset \Phi_{n-1}(L_{n-1}) \setminus K_{n_1}$ だから

$K_{n-1} \subset \Phi_{n-1}(L_{n-1}) \subset U(K_{n_1}, H) \subset B^3$ 以下同様にして K が3-球体に含まれることが示せる.

Case 2. $\sup_i \#\{i \mid \dim(\Phi_i(L_i) \cap d) = 1\} < n_0$ のとき. この集合 $\{ \}$ は自然数の集合なので $\sup_i \#\{i \mid \dim(\Phi_i(L_i) \cap d) = 1\} = \#\{i \mid i \leq n_2, \dim(\Phi_i(L_i) \cap d) = 1\}$ となる n_2 が存在する. そして $n \geq n_2$ を満足する全ての n に対し $\Phi_n(L_n) \cap d$ は有限個の点からなる集合である. $\mathcal{Q}(H - U(d, H))$ は3-球体に位相同型であるから $\mathcal{S}(\Phi_n)$ のタイプのうち type I(1) は type II に変更出来,

また type II の像の正則近傍は 3-球体だからアイソトピーとカラプシングで K_n の \mathbb{R} を進めたときに消滅出来る。従って $\mathcal{S}(\Phi_n)$ のタイプは type I (2) と type III だけと考えてよい。



$p \in d_R \cap K_n$ をとり, $K'_n = K_n - \bar{U}(d, H)$ とおく. $\partial U(d, H) \cap K_n$ 上において p と最も近い点を p^+, p^- とする. $p^+ \in K'_n$ を含む K'_n の連結成分を Q_{p^+} とし, $p^- \in K'_n$ を含む K'_n の連結成分を Q_{p^-} とする. Q_{p^+} と non-splittable な K'_n の連結成分の集合を S_{p^+} とする. ここで Q_{p^+} と non-splittable な K'_n の連結成分とは $K'_n \cap (Q_{p^+} \cap \Phi_n(L_n))$ の連結成分のこととする. もし $Q_{p^-} \in S_{p^+}$ なら $K_n \subset \Phi_n(L_n) \searrow K_{n+1}$ としたとき K_{n+1} の中に p を含む閉曲線 β があり $\dim(\Phi_{n+1}(L_{n+1}) \cap d) = 0$ より β には特異 2-球体が張れず従って $\beta \neq 0$ in H . この事から L_{n+1} はカラプシブルでない事が示せ. 矛盾が出る. そこで $Q_{p^-} \notin S_{p^+}$ としてよい. 同様に $Q_{p^+} \notin S_{p^-}$ また同様の方法により $S_{p^+} \cap S_{p^-} = \emptyset$ も示せる. このような事を $K_n \cap d$ の各点に対して行なう. $K_n \cap d = \{p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_m^{(n)}\}$ としたとき $p_1^{(n)}, \dots, p_m^{(n)}$ の各々に対し $S_{p_1^{(n)}}, S_{p_2^{(n)}}, \dots,$

$S_{p_{r_1}^{\pm}}^{(n)}, S_{p_{r_2}^{\pm}}^{(n)}$ が作れ, 上で示したように任意の i に対し

$S_{p_i^+}^{(m)} \cap S_{p_i^-}^{(m)} = \emptyset$ が示せる. 次に $S_{p_i^+}^{(m)} \cap S_{p_j^{\pm}}^{(m)} \neq \emptyset$ のとき

$p_i^+ \longleftrightarrow p_j^{\pm}$ とかくことにする (ただし \pm は $+$ または $-$). 以後で示すように $n \geq n_2$ に対し $p_i^{(n)}$ の (n) は省略してもよい. いま

$p_i^+ \longleftrightarrow p_{j_1}^+ \longleftrightarrow p_{j_2}^+ \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow p_i^-$ となっても上と同様の性質をもつ単純閉曲線 $\beta \subset K_{n+1}$ が取れて矛盾が示せる. そこで p_i^+

と \longleftrightarrow で連結される $S_{p_j^+}^{(m)}$ の集合を $T_{p_i^+}^{(m)}$, p_i^- と \longleftrightarrow で連結される $S_{p_j^-}^{(m)}$ の集合を $T_{p_i^-}^{(m)}$ とすると $T_{p_i^+}^{(m)} \cap T_{p_i^-}^{(m)} = \emptyset$ である. $\dim(\Phi_m(L_m) \cap d) = 0$ ($\forall m \geq n_2$) より $n, m \geq n_2$ となる n, m に対し

$K_n \cap d = K_m \cap d$ ところで n を大きくして m としたとき

$T_{p_i^+}^{(m)} \cap T_{p_i^-}^{(m)} \neq \emptyset$ となれば同様に矛盾が示せる. よって $m \geq$

n_2 となる全ての m に対して $T_{p_i^+}^{(m)} \cap T_{p_i^-}^{(m)} = \emptyset$. このようにして

$T_{p_i^+}^{(m)}, T_{p_i^{\pm}}^{(m)}, \dots, T_{p_i^{\pm}}^{(m)}$ (\pm は $+$ または $-$) が出来る. またもし

$T_{p_i^+}^{(m)} \cap T_{p_j^{\pm}}^{(m)} \neq \emptyset$ なら T の定義から $T_{p_i^+}^{(m)} = T_{p_j^{\pm}}^{(m)}$ 故に $T_{p_i^+}^{(m)} \cap T_{p_j^{\pm}}^{(m)}$

$= \emptyset$ としてよい. 更に $m > n$ なる m, n に対し $T_{p_i^+}^{(m)} \cap T_{p_i^-}^{(n)}$

$= \emptyset$ であっても $T_{p_i^+}^{(m)} = T_{p_j^{\pm}}^{(m)}$ となることがある. ところで $g_n =$

$\# \{T_{p_i^{\pm}}^{(n)}\}$ (\pm は $+$ または $-$) とおくと g_n は単調減少で $\{g_n\}$

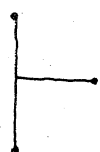
は自然数の数列. 従って $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ となる g があり, 更に

$g_{n_3} = g$ となる $n_3 (\geq n_2)$ がある. ところで $T_{r_1}^{(n_3)}, T_{r_2}^{(n_3)}, \dots, T_{r_q}^{(n_3)}$ と

おく. r_i は p_i^{\pm} (\pm は $+$ または $-$) に等しい. $T_{r_i}^{(n_3)} \cap T_{r_j}^{(n_3)} = \emptyset$.

\bar{H} をハンドル体 H の copy, \bar{d}_R を H のメリディアンディスクの copy

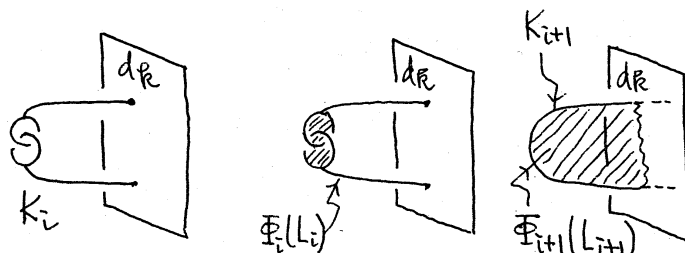
で \bar{H} のメリディアンディスクとする。 $\partial U(d_R, H) = d_R^+ \cup d_R^-$ とおく。
 $d_R^\pm \cong d_R$. もし $Tr_i^{(n_3)} \cap d_R^\pm \neq \emptyset$ なら d_R^\pm 上に頂点 v_{Ri}^\pm をとる
 (± は + または -) (d_R^\pm は d_R に対応する \bar{H} の中のメリディアンディ
 スク). 次に同じ index i をもつ頂点の集合 $\{v_{Ri}^\pm\}$ を $\mathcal{C}(\bar{H} - U(d, \bar{H}))$
 の中で線分で結ぶ. このとき r 点以上を結ぶときは図の



ように線分の途中から分岐させて結ぶ. すると各 $Tr_i^{(n_3)}$
 に対し $\mathcal{C}(\bar{H} - U(d, \bar{H}))$ の中に 1-complex が対応する.

これを J_i ($i=1, 2, \dots, 8$) とかく. また $J_i \cap J_j = \emptyset$ ($i \neq j$) とし
 ておく. これは $J_i \cap J_j \neq \emptyset$ と $Tr_i^{(n_3)} \cap Tr_j^{(n_3)} \neq \emptyset$ が同値だからであ
 る. $Tr_i^{(n_3)} \cap d_R^\pm \neq \emptyset$ なら v_{Ri}^\pm が唯一つきまるから d_R^\pm 上に同じ
 index をもつ v_{Ri}^\pm は唯一つ. 即ち任意の J_i と任意の d_R^\pm (± は
 + または -) に対し $J_i \cap d_R^\pm = \text{one point}$ である. 今 $Tr_i^{(n_3)}$ の定義
 から $(Tr_i^{(n_3)} \cap d_R^\pm) \cap (Tr_j^{(n_3)} \cap d_R^\pm) = \emptyset$ ($i \neq j$, ± は複号同順) であ
 るが $Tr_i^{(n_3)}$ と $Tr_j^{(n_3)}$ を $U(d, H)$ の積構造を使って $U(d, H)$ に延長
 したとき $(Tr_i^{(n_3)} \cap d) \cap (Tr_j^{(n_3)} \cap d) \neq \emptyset$ なら $U(d, \bar{H})$ の中で v_{Ri}^\pm と
 v_{Rj}^\pm を 1-simplex で結ぶ. このとき例えば v_{Ri}^\pm と v_{Ri}^\pm ($i \neq l$)
 が v_{Rj}^\pm と結ばれることもある. この結合を使うことにより \bar{H}
 内に 1-複体 J が作られる. J は明らかに連結である. 更に
 J が自由頂点 (即ち堆一つの 1 単体の端点となっているよう
 な頂点) をもっていると, これはある $Tr_i^{(n_3)}$ が唯一つの $dr(\in d)$
 とのみ交わっている事を示す. このとき $\mathcal{C}(\bar{H} - U(d, H)) \cong B^3$

だから下図のように K_i の i を増やすことにより $\dim(\Phi_{i+1}(L_{i+1}) \cap d_R)$

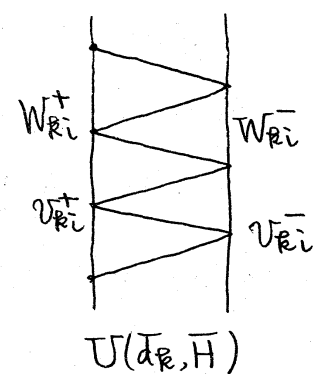


$= 1$ となり全ての

$n \geq n_2$ に対し

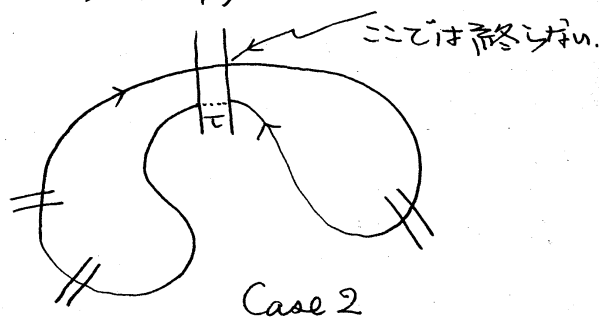
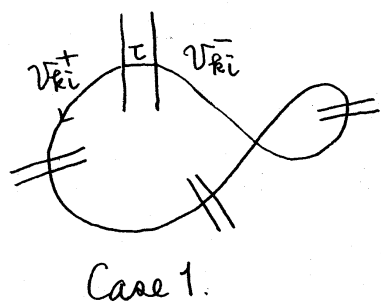
$\Phi_n(L_n) \cap d_R$ が有限

個の点集合であることに矛盾する。従って J は閉 1-複体である。次に J 上に H で 1 点にホモトピックでない閉曲線 γ が存在することを示す。 d_R 上の vertex v_{Ri}^+ を取り $U(d_R, H)$ 内で v_{Ri}^+ と結ばれる $d_R \cap J$ の点を v_{Ri}^- (必ずしも一意的でない) とする。



$U(d_R, H)$ 内で v_{Ri}^- と結合可能な $d_R \cap J$ 上の頂点の集合を W_{Ri}^- とおく。 v_{Ri}^+ を始点とし J 上を $U(d_R, H)$ の外側に向かい $U(d_R, H)$ とは transverse に交叉するとする。そのようなたどった弧 (必ずしも単純弧でない) を γ' とする。

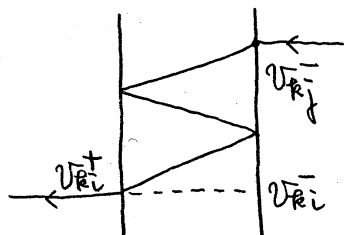
Case A. $\dot{U}(d_R, H)$ を通らずに v_{Ri}^- にたどり着くとき (即ち $\gamma' = v_{Ri}^+ \cup v_{Ri}^-$ & $\gamma' \cap \dot{U}(d_R, H) = \emptyset$). v_{Ri}^- と v_{Ri}^+ を結



が1-単体をととし, $\gamma = \tau \cup \gamma'$ とすると γ は閉曲線て $\gamma \cap \bar{d}_k = \tau \cap \bar{d}_k = 1$ 点 従って $\gamma \neq 0$ in \bar{H} .

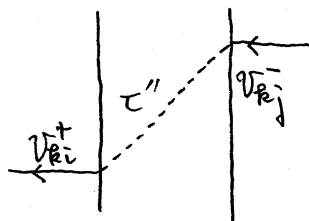
Case B. $\dot{U}(\bar{d}_k, \bar{H})$ は通るが最後に除いて \bar{d}_k^- の外側から W_{k_i} に到達せず最後に \bar{v}_{k_i} にたどり着くとき. $\gamma = \gamma' \cup \tau$ とおく. τ は Case A と同じ. γ は閉曲線て $\bar{d}_k \cap \gamma$ を \bar{d}_k^- 上で \bar{v}_{k_i} と結ぶと γ は \bar{v}_{k_i} を基点とするいくつかの閉曲線の和であり. その1つ1つはある $U(\bar{d}_i, \bar{H})$ を通る ($i=k$ のときもある) 従って1つ1つの閉曲線が1点にホモトープでない. しかも $U(\bar{d}_i, \bar{H})$ を transverse に通り抜けているから $\pi_1(\bar{H}) (= \text{自由群})$ の元としてみて reduced pair $\alpha \cdot \alpha^{-1}$ という形をしていない. 故に $\gamma \neq 0$ in \bar{H} .

Case C. 最後に W_{k_i} 内の \bar{v}_{k_i} 以外の点, 例えば \bar{v}_{k_j} , に $U(\bar{d}_k, \bar{H})$ の外側から近づいて終るとき. (W_{k_i} 内で終ることはない. そのときは $U(\bar{d}_k, \bar{H})$ を通り抜けて更に上をたどる). このとき



きは $U(\bar{d}_k, \bar{H})$ 内で左図のように上をたどる折れ線て $v_{k_i}^+$ と $v_{k_j}^-$ を結ぶ. これを τ' とする. $\gamma = \tau' \cup \gamma'$ とおく

と γ は τ' の部分以外では全ての $U(\bar{d}_j, \bar{H})$ を transverse に通り



抜け, τ' 上でも下図の τ'' のように考えれば (即ち γ と $\gamma_1 = \tau'' \cup \gamma'$ は $U(\bar{d}_k, \bar{H})$ にサポートをもつアイソトピーで移れる)

transverse に通り抜けていると考えられるから Case B と同じ理由で $\gamma_1 \neq 0$ in \bar{H} . $\therefore \gamma \neq 0$ in \bar{H} .

以上より J 上に \bar{H} 内で 1 点にホモトープでない閉曲線 γ が存在することが示された. $\gamma - (\gamma \cap U(\bar{\alpha}, \bar{H}))$ の各成分は $T_{r_i}^{(n_3)}$ に対応しているから, $\tilde{T}_{r_i}^{(n_3)}$ を $U(\bar{\alpha}, \bar{H})$ の部分に積構造を利用して延長したものとして, $\bigcup_{i=1}^q \tilde{T}_{r_i}^{(n_3)}$ の中に H で 1 点にホモトープでない閉曲線 β が取れる. これは前と同じ理由によって矛盾. 従って Case 2 は J がカラプシブルという場合だけが起り. このときは J を含む 3-球体が存在し, それ故 $\bigcup_{i=1}^q \tilde{T}_{r_i}^{(n_3)}$ を含む 3-球体が存在する. 故に K を含む 3-球体が存在する.